

## ESTIMATIVAS DE CHEBYSHEV E O POSTULADO DE BERTRAND

FERNANDO FERREIRA

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , define-se  $\pi(n)$  como sendo o número de primos que não excedem  $n$ . No final do século XIX, Jacques Hadamard e Charles de la Vallée-Poussin demonstraram um resultado célebre:

**Teorema do Número Primo.**

$$\lim_n \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1.$$

Também se escreve  $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$ . Este teorema diz que, assintoticamente,  $\pi(n)$  está próximo do número  $\frac{n}{\ln n}$ . Uma maneira equivalente de exprimir este facto é dizer que, para todos os número reais  $c$  e  $C$  com  $c < 1 < C$ , se tem

$$(*) \quad c \frac{n}{\ln n} < \pi(n) < C \frac{n}{\ln n}$$

para  $n$  suficientemente grande. O teorema é um resultado sobre a distribuição dos números primos e tem várias consequências interessantes. Uma delas é que (pelo menos a partir de certa ordem) há sempre números primos entre  $n$  e  $2n$ . Com efeito:

$$\pi(2n) - \pi(n) > c \frac{2n}{\ln 2n} - C \frac{n}{\ln n} \geq \frac{4c}{3} \frac{n}{\ln n} - C \frac{n}{\ln n} = \left( \frac{4c}{3} - C \right) \frac{n}{\ln n}.$$

A desigualdade do meio é justificada pelo facto de se ter  $\frac{2}{\ln 2n} \geq \frac{4}{3 \ln n}$  para  $n \geq 4$ , como o leitor pode facilmente confirmar. Se tomarmos constantes  $c$  e  $C$  com  $c < 1 < C$  e  $\frac{4c}{3} > C$ , vem que  $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ . Logo, há números primos entre  $n$  e  $2n$ .

A demonstração do teorema do número primo está para além do âmbito deste curso. A prova original usa métodos de análise complexa (que iremos aflorar em lições posteriores). Porém, já em meados do século XIX, o matemático Pafnuty Chebyshev obteve uma versão fraca do teorema do número primo. Chebyshev exibiu constantes  $c < 1 < C$  que tornam a desigualdade (\*) verdadeira. Os resultados de Chebyshev baseiam-se em métodos elementares e são suficientes para demonstrar o chamado postulado de Bertrand:

**Postulado de Bertrand.** *Para todo o número natural  $n$ , existe pelo menos um primo  $p$  tal que  $n < p < 2n$ .*

O postulado de Bertrand é realmente um teorema (demonstrado pela primeira vez por Chebyshev), mas esta é a forma tradicional de referir o resultado. No que se segue, vamos enunciar e justificar uma série de resultados auxiliares que nos vão permitir demonstrar este teorema.

**Proposição 1.** *Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$ .*

**Demonstração.**  $4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1) \binom{2n}{n} \leq 2n \binom{2n}{n}$ , onde se usa o facto de que  $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$  e de que  $2 \leq \binom{2n}{n}$ .  $\square$

**Lema 1.** *Para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$ .*

**Demonstração.**  $\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2} \left( \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \frac{1}{2} 2^{2n+1} = 2^{2n} = 4^n$ . Note-se que  $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$ .  $\square$

**Lema 2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\prod_{\substack{n+1 < p \leq 2n+1 \\ p \text{ primo}}} p \mid \binom{2n+1}{n}.$$

**Demonstração.** Basta ver que, para todo o número primo  $p$  com  $n+1 < p \leq 2n+1$  se tem  $p \mid \binom{2n+1}{n}$ . Visto que  $p \mid (2n+1)(2n) \cdots (n+2)$  e  $n! \mid (2n+1)(2n) \cdots (n+2)$  (pois o produto de  $n$  números consecutivos é sempre múltiplo de  $n!$ ) e visto que  $n! \perp p$ , sai  $(pn!) \mid (2n+1)(2n) \cdots (n+2)$ . O resultado agora é imediato.  $\square$

**Proposição 2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^n.$$

**Demonstração.** Por indução em  $n$ . Os casos  $n = 1, 2$  são verdadeiros. Se  $n$  não é primo então  $\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p = \prod_{\substack{p \leq n-1 \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^{n-1} \leq 4^n$ , onde a penúltima desigualdade é por hipótese de indução. Se  $n$  é primo, com  $n > 2$ ,  $n$  é ímpar e portanto da forma  $n = 2m + 1$ . Vem:

$$\prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p = \prod_{\substack{p \leq m+1 \\ p \text{ primo}}} p \cdot \prod_{\substack{m+1 < p \leq 2m+1 \\ p \text{ primo}}} p \leq 4^{m+1} \binom{2m+1}{m} \leq 4^{m+1} 4^m = 4^{2m+1} = 4^n.$$

A primeira desigualdade justifica-se por hipótese de indução (completa) e pelo Lema 2. A segunda desigualdade usa o Lema 1.  $\square$

**Proposição 3.** Seja  $p$  um número primo e suponhamos que  $p^r \mid \binom{n}{k}$ , onde  $n, r$  e  $k$  são inteiros positivos com  $k \leq n$ . Nestas condições, tem-se  $p^r \leq n$ .

**Demonstração.** Da hipótese sai que  $p^r \mid n(n-1) \cdots (n-k+1)$ . Seja  $l$  inteiro máximo tal que  $p^l \mid m$  para certo  $m$  com  $n-k+1 \leq m \leq n$ . Vamos ver que  $r \leq l$ , o que resolve o problema (pois,  $p^r \mid p^l$  e  $p^l \mid m$  o que implica  $p^r \leq m \leq n$ ). Considerem-se  $a$  e  $b$  os inteiros não negativos tais que  $m+b = n$  e  $m-a = n-k+1$ . Vem  $k = a+b+1$  e

$$\binom{n}{k} = \frac{(m+b) \cdots (m+1) m(m-1) \cdots (m-a)}{(a+b+1)!}.$$

Como  $(a+b+1)! = (a+b+1)(a+b) \cdots (a+1)a!$  e visto que  $b! \mid (a+b) \cdots (a+1)$ , vem que existe um inteiro  $q$  tal que  $(a+b+1)! = b!a!q$ . Logo

$$\binom{n}{k} = \frac{(m+b) \cdots (m+1)(m-1) \cdots (m-a)m}{b \cdots 1 \quad 1 \cdots a \quad q}.$$

Se uma potência do primo  $p$  divide algum  $m+j$  ( $1 \leq j \leq b$ ), como essa potência também divide  $m$  (por definição de  $l$  e  $m$ ), sai que essa potência divide  $j$ . De igual modo, se uma potência de  $p$  divide  $m-i$  ( $1 \leq i \leq a$ ) então também divide  $i$ . Em suma, todos os fatores de  $p$  no produto  $(m+b) \cdots (m+1)(m-1) \cdots (m-a)$  cancelam com os fatores do produto  $b!a!$ . Necessariamente, os fatores  $p$  de  $\binom{n}{k}$  são fatores de  $m$ , i.e.,  $p^r \mid m$ . Por definição de  $m$  e  $l$ , vem  $r \leq l$ , como se queria.  $\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o postulado de Bertrand. Dado  $n$  um número natural (supomos  $n \geq 5$ ), considere-se o coeficiente binomial  $\binom{2n}{n}$ . Claramente, os seus fatores primos  $p$  são menores ou iguais a  $2n$ . Admitamos, com vista a um absurdo, que não existem primos entre  $n$  e  $2n$ . Assim, os fatores primos  $p$  de  $\binom{2n}{n}$  dividem-se em três casos:

- (1)  $p \leq \sqrt{2n}$ .
- (2)  $\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n$ .
- (3)  $\frac{2}{3}n < p \leq n$ .

Pela Proposição 3, se uma potência  $p^r$  dum primo  $p$  divide  $\binom{2n}{n}$ , então  $p^r \leq 2n$ . Note-se que, em particular, no segundo caso, vem  $r \leq 1$ . Ora, o terceiro caso não se dá, ou seja, não existem fatores primos  $p$  de  $\binom{2n}{n}$  tais que  $\frac{2}{3}n < p \leq n$ . Com efeito,  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  e há exatamente dois desses fatores (ímpares)  $p$  no numerador, nomeadamente em  $p$  e  $2p$  ( $3p$  já excede  $2n$ ), e dois desses fatores  $p$  no denominador (um em cada  $n!$ ). Os fatores  $p$  do numerador e denominador cancelam e, portanto,  $p \nmid \binom{2n}{n}$ .

A fatorização de  $\binom{2n}{n}$  em produto de primos é, pois, da forma:

$$\binom{2n}{n} = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} q_1 \cdots q_s,$$

os  $p_i$ s e os  $q_j$ s são diferentes dois a dois, cada  $p_i$  está no caso (1) e cada  $q_j$  está no caso (2). Vem, usando a Proposição 2 para justificar a última desigualdade:

$$\binom{2n}{n} = (p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k})(q_1 \cdots q_s) \leq (2n)^{\pi(\lfloor \sqrt{2n} \rfloor)} \prod_{\substack{q \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor \\ q \text{ primo}}} q \leq (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}.$$

Assim,

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n},$$

pela Proposição 1. Sai facilmente  $2^{2n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 2^{\frac{4}{3}n}$  e, portanto,  $2^{\frac{2}{3}n} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}$ . Passando a logaritmos fica-se com

$$\frac{2}{3}n \ln 2 \leq (1 + \sqrt{2n}) \ln(2n).$$

Esta desigualdade é verdadeira para  $n = 467$  e falsa para  $n = 468$ . Dado que a curva definida pela função de variável real positiva  $x \rightsquigarrow (1 + \sqrt{2x}) \ln(2x)$  é côncava (pois a segunda derivada desta função é negativa: é um exercício), a desigualdade acima é falsa para todos os valores inteiros  $n$  com  $n \geq 468$ . Em suma, a negação do postulado de Bertrand leva a absurdo para  $n \geq 468$  e, portanto, o postulado é verdadeiro para estes valores. O postulado também vale para  $n \leq 467$ . Para ver isso basta considerar a seguinte sucessão de primos:

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

O postulado de Bertrand ficou demonstrado.